



## GETPRO Kongress 25./26. März 2015 in Würzburg

### Das Zweikugelmaß bei Schrägverzahnungen mit ungerader Zähnezahl

**Vortragender:** B. Eng., Philip, Jukl  
FRESCO GmbH  
Jakob-Baier-Straße 3  
90518 Altdorf

**Weitere Autoren:** Dipl.-Ing. (FH), Rudolf, Och  
FRESCO GmbH



#### Zusammenfassung:

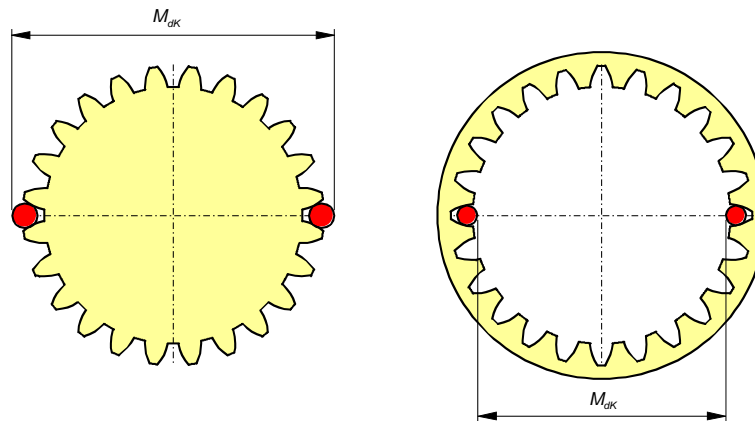
Ein gängiges Hilfsmaß für die Zahndicke ist das diametrale Zweikugelmaß MdK. Für dessen Messung gibt es eine Reihe von Messmitteln. Für Einzelteile und Kleinserien finden einfache, mit zwei Kugeln und einer Messuhr ausgestatteten, Handmessmittel Anwendung. Diese Messmittel sind nicht nur eine kostengünstige Lösung sondern haben zusätzlich den Vorteil, dass das Maß direkt in der Fertigungsmaschine überprüft werden kann, ohne das Werkstück ausspannen zu müssen.

Bei dieser Methode wird zunächst das Messmittel mit Endmaßen auf das Sollmaß (nach addieren bzw. subtrahieren der Kugeldurchmesser) eingestellt. Anschließend erfolgt die Messung am Werkstück indem mit Hilfe der Messuhr der Umkehrpunkt gesucht wird. Die Abweichung zum Sollmaß kann direkt abgelesen werden - es sei denn, es handelt sich um eine Schrägverzahnung mit ungerader Zähnezahl. Die geometrischen Verhältnisse bei solchen Verzahnungen sorgen dafür, dass die Messstelle des Umkehrpunktes nicht mit der des Zweikugelmaßes zusammenfällt.

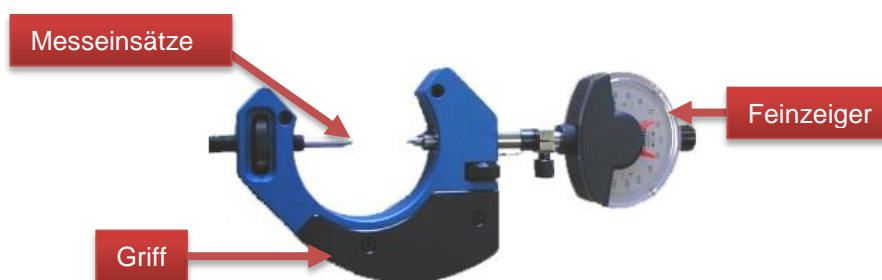
In diesem Vortrag wird diesem Phänomen auf den Grund gegangen. Im Hause FRESCO wurden dazu Versuche gemacht, sowie ein mathematisches Modell erstellt. So ist es möglich den Unterschied zwischen MdK-Maß und MdKU-Maß (Zweikugelmaß am Umkehrpunkt) softwaremäßig zu berechnen. Damit behält die Messmethode der Umkehrpunktsuche auch für Schrägverzahnungen mit ungerader Zähnezahl praktische Relevanz.

# 1 Überblick

Das diametrale Zweikugelmaß ist das wichtigste Prüfmaß für die indirekte Messung der Zahndicke. Es ist bei Außenverzahnungen das größte äußere Maß über und bei Innenverzahnungen das kleinste innere Maß zwischen zwei Kugeln, die in den zwei am weitesten voneinander entfernten Zahnlücken zweiflankig anliegen [DIN 21773, 2014].

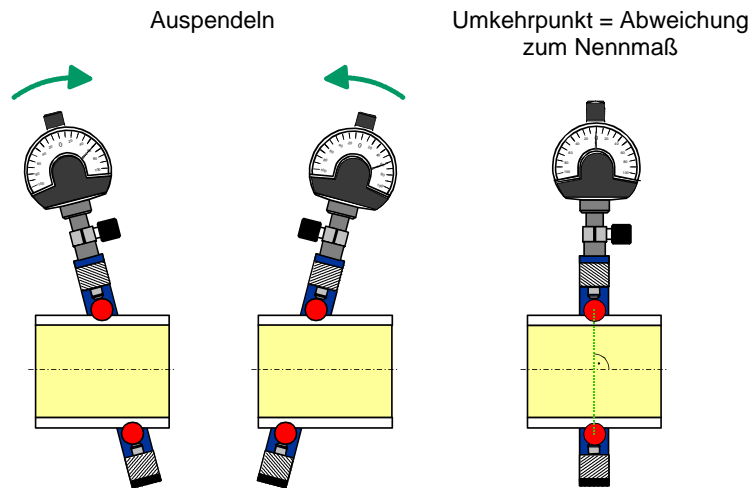


Für das Messen des Zweikugelmaßes einer Verzahnung gibt es verschiedene Geräte. Das einfachste davon ist ein Handmessgerät mit Messkugeleinsätzen, das mit einem Feinzeiger ausgestattet ist.



Solche Geräte finden beispielsweise in der Fertigung Anwendung, wenn das Maß kontrolliert werden soll ohne das Werkstück aus der Maschine ausspannen zu müssen oder wenn die Zahnweite nicht gemessen werden kann (z.B. bei Innenverzahnungen).

Der Prüfer stellt den Feinzeiger, mit Hilfe von Endmaßen, auf das Sollmaß (nach Addition bzw. Subtraktion des Kugeldurchmessers) ein. Anschließend sucht er durch Auspendeln den tiefsten Punkt und erhält so die relative Abweichung zum Sollkugelmaß.



Allerdings stimmt das nur, wenn es sich **nicht** um eine Schrägverzahnung mit ungerader Zähnezahl handelt. Denn bei solchen Verzahnungen liegt der tiefste Punkt (auch Umkehrpunkt genannt) in einer Ebene, die nicht rechtwinklig zur Verzahnungsachse steht.

Das bedeutet konkret:

Sucht man bei Schrägverzahnungen mit ungerader Zähnezahl durch Auspendeln nach dem Umkehrpunkt, steht das Messgerät (meist unmerklich) schief und man misst das falsche Maß.

## 2 Versuch am Modell

Ein Messgerät ist hier in einem Messständer aufgenommen und zusätzlich mit einem Plananschlag versehen.



Der Prüfling für diesen Versuch hat die folgenden Verzahnungsdaten:

$z$	7	$\beta$	$20^\circ$
$m_n$	2,145	$M_{dK}$	25,041
$\alpha$	$20^\circ$	$d_M$	5,0

1) Liegt der Prüfling sauber am Plananschlag an, ist auch die Messebene rechtwinklig zur Verzahnungsachse. Hier wird der Feinzeiger (hier mit Hundertstel-Skalierung) genullt.



2) Verkippt man den Prüfling, findet man den tiefsten Punkt jedoch an einer anderen Stelle. Es ist deutlich zu sehen, dass der Prüfling jetzt schief im Messgerät steht.



Würde man diese Verzahnung ohne Plananschlag messen und stur nach dem Umkehrpunkt suchen, würde man davon ausgehen, dass das Zweikugelmaß ein Zehntel Millimeter zu klein ist. Die Verkipfung ist natürlich nicht immer so deutlich wie bei dieser Verzahnung.

Für den Anwender des Verfahrens drängen sich zwangsläufig folgende Fragen auf:

1. Wie groß ist der Fehler?
2. Warum tritt das nur bei Schrägverzahnungen mit ungerader Zähnezahl auf?
3. Wovon hängt die Größe des Fehlers ab?
4. Gilt das auch für Innenverzahnungen?

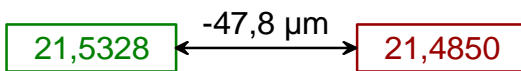
In den folgenden Abschnitten werden diese Fragen geklärt.

### 3 Wie groß ist der Fehler? (Beispiele aus der Praxis)

Dieser Abschnitt enthält verschiedene Beispiele von Verzahnungen aus der Praxis. Um ein Gefühl für die Größe des Messfehlers zu bekommen werden hier - zunächst ohne weitere Erläuterung - die Zahlenwerte von Zweigugelmaß und dem Maß am Umkehrpunkt verglichen.

Ein Lenkritzell hat die folgenden Verzahnungsdaten:

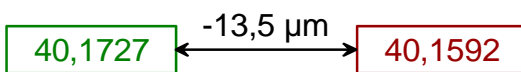
$z$	7	$\beta$	$-15,353^\circ$
$m_n$	2,145	$M_{dK}$	21,5328
$\alpha$	$20^\circ$	$d_M$	4,0



Verkippung: 1,356 mm

Das Planetenrad eines Getriebes hat folgende Verzahnungsdaten:

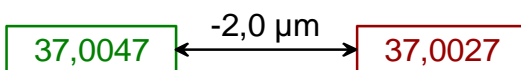
$z$	23	$\beta$	$18,5^\circ$
$m_n$	1,4	$M_{dK}$	40,1727
$\alpha$	$17,5^\circ$	$d_M$	3,0



Verkippung: 1,075 mm

Das Schneckenrad eines Getriebes hat folgende Verzahnungsdaten:

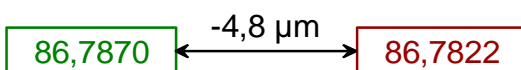
$z$	23	$\beta$	$8^\circ$
$m_n$	1,3	$M_{dK}$	37,0047
$\alpha$	$20^\circ$	$d_M$	3,0



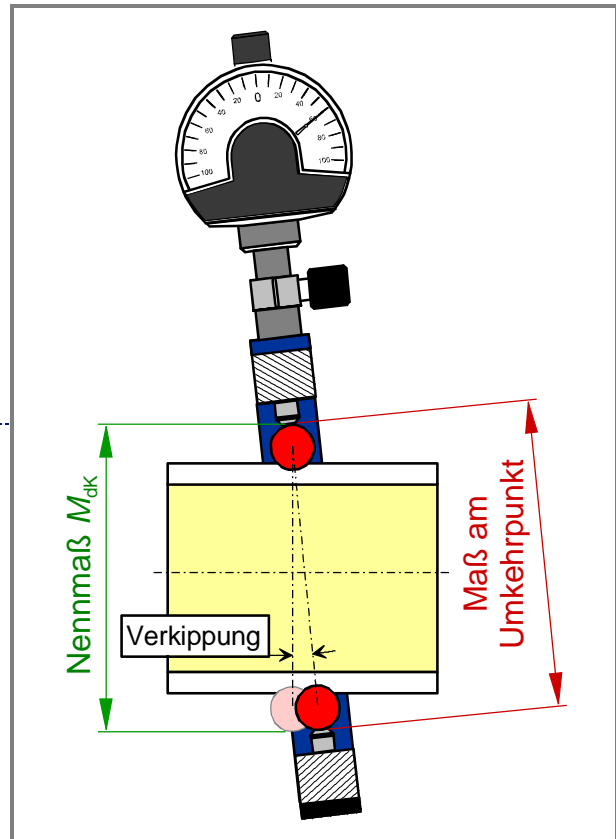
Verkippung: 0,378 mm

Ein Lehrzahnrad hat folgende Verzahnungsdaten:

$z$	51	$\beta$	$-18,0^\circ$
$m_n$	1,55	$M_{dK}$	86,7870
$\alpha$	$17,5^\circ$	$d_M$	3,0

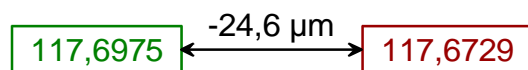


Verkippung: 0,947 mm



Ein Lehrzahnrad hat folgende Verzahnungsdaten:

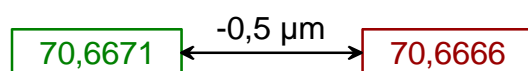
$z$	31	$\beta$	$-20,0^\circ$
$m_n$	3,18	$M_{dK}$	117,6975
$\alpha$	$19^\circ$	$d_M$	7,0



Verkippung: 2,528 mm

Das Stellrad eines Getriebes hat folgende Verzahnungsdaten:

$z$	95	$\beta$	$12,5^\circ$
$m_n$	0,7	$M_{dK}$	70,6671
$\alpha$	$10^\circ$	$d_M$	1,5

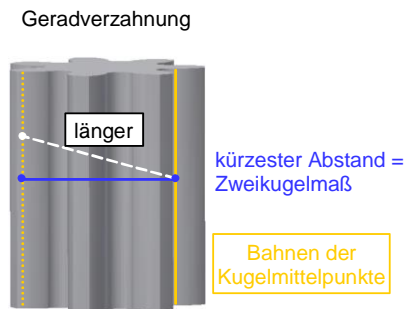


Verkippung: 0,271 mm

Der Fehler variiert, je nach Verzahnung, sehr stark von wenigen Zehntelmikrometern bis hin zu mehreren Hundertstel Millimetern. Eine pauschale Aussage lässt sich an dieser Stelle nicht treffen. Deshalb wird das Phänomen in den folgenden Abschnitten genauer beleuchtet.

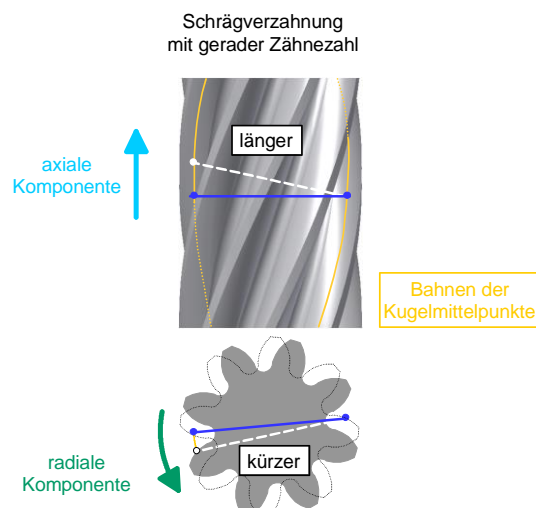
## 4 Warum nur Schrägverzahnungen mit ungerader Zähnezahl?

Warum dieses Phänomen nur bei Schrägverzahnungen mit ungerader Zähnezahl auftritt wird am deutlichsten, wenn man sich die mögliche Bahn des Mittelpunktes der zweiflankig anliegenden Messkugel beim Verkippen vorstellt. Bei Geradverzahnungen ist die mögliche Bahn jeweils eine gerade Linie – egal ob die Zähnezahl gerade oder ungerade ist. Sobald eine Verkippung auftritt wird der Abstand zwischen den Kugelmittelpunkten zwangsläufig größer. Folglich fallen Umkehrpunkt (= kürzester Abstand zwischen den Kugelmittelpunkten) und Zweikugelmaß (definiert in der Ebene senkrecht zur Achse) bei Geradverzahnungen immer zusammen.



Bei Schrägverzahnungen mit gerader Zähnezahl sind die Bahnen der Kugelmittelpunkte in der Seitenansicht gebogen. Das liegt daran, dass die Kugel beim Verkippen nicht nur nach oben oder unten wandert sondern in einer zusätzlichen Drehbewegung entlang der Schraubenlinie um die Verzahnung herum. Bei der Bewegung nach oben oder unten wird der Abstand – wie bei der Geradverzahnung – größer. Durch die Drehbewegung entlang der Schraubenlinie kommt jedoch die eine Kugel der anderen Kugel entgegen, was den Abstand verkürzt. Es stehen sich damit zwei Komponenten entgegen:

- Vergrößerung des Abstands durch die vertikale Bewegung (**axiale Komponente**)
- Verkürzung des Abstands durch die Drehbewegung (**radiale Komponente**)



Jetzt kann man sich vorstellen, dass die Kugel der anderen Kugel bei der Drehbewegung schneller entgegenkommt, je größer der Schrägungswinkel ist. Doch für alle üblichen Schrägungswinkel (sogar bis über  $45^\circ$ ) bei Verzahnungen mit **gerader Zähnezahl** gilt:

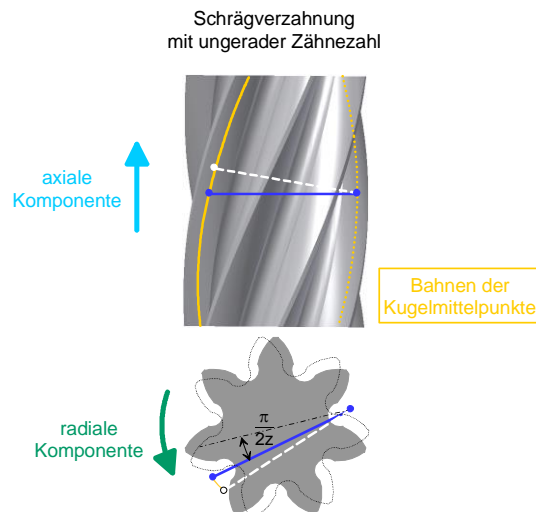
### axiale Komponente > radiale Komponente

Die Vergrößerung des Abstandes ist in Summe also stets größer als die Verkürzung. Deshalb fallen auch bei Schrägverzahnungen mit gerader Zähnezahl Umkehrpunkt und Zweikugelmaß immer zusammen.

Bei Schrägverzahnungen mit ungerader Zähnezahl ist das anders. Auch hier gibt es die beiden Komponenten.

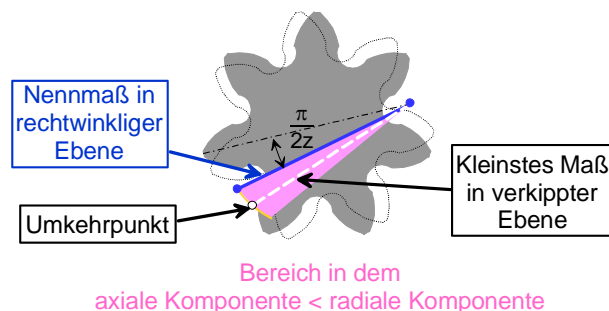
- Vergrößerung des Abstands durch die vertikale Bewegung (**axiale Komponente**)
- Verkürzung des Abstands durch die Drehbewegung (**radiale Komponente**)

Allerdings hat die radiale Komponente bei ungeraden Zähnezahlen einen Vorsprung: den Winkel  $\frac{\pi}{2z}$ .



Das führt dazu, dass es einen Bereich gibt, in dem Verkürzung des Abstandes der Vergrößerung überlegen ist. Das gilt solange, bis die schneller wachsende axiale Komponente die radiale wieder überholt.

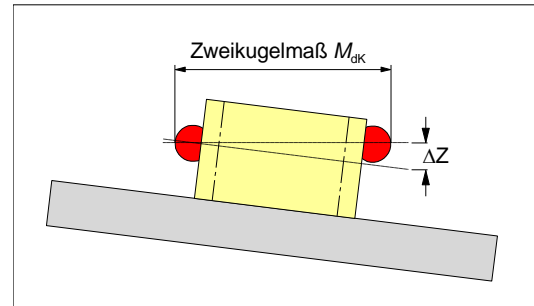
### axiale Komponente < radiale Komponente (bereichsweise)



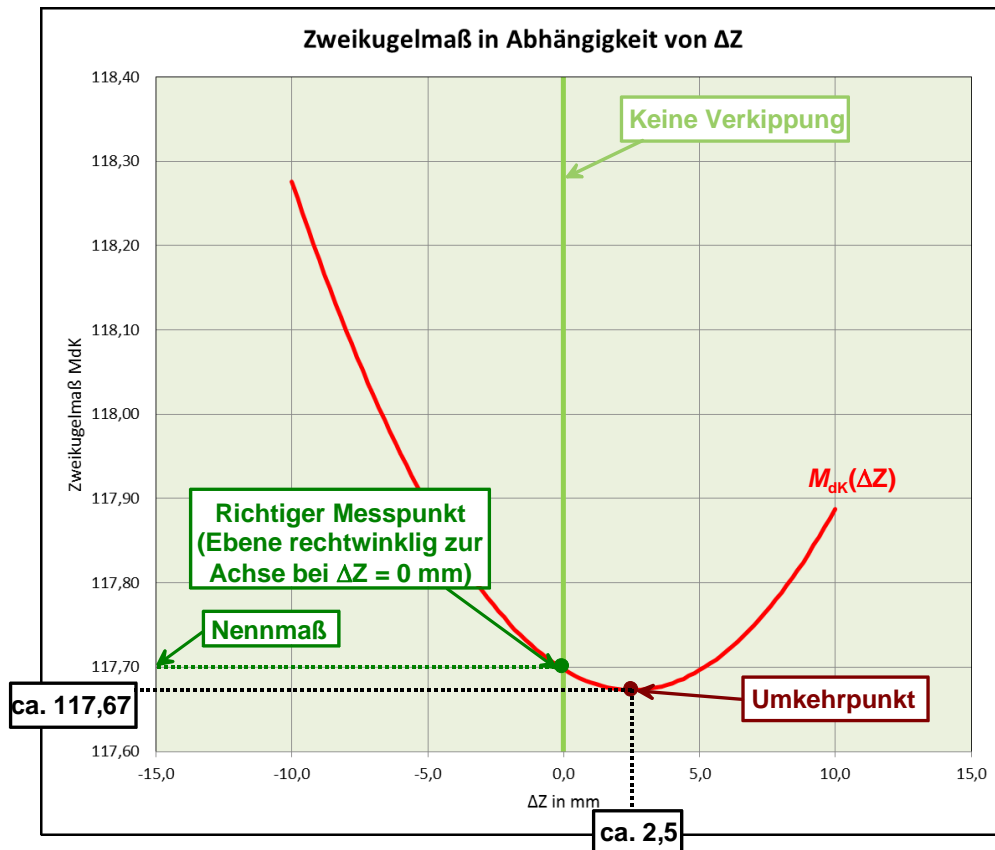
Beim Auspendeln gibt es deshalb einen kürzeren Abstand im verkippten Zustand. Das Zweikugelmaß in der Ebene senkrecht zur Achse ist größer.

Der Sachverhalt lässt sich mathematisch beschreiben. Am Ende steht eine Funktion zur Berechnung des Zweikugelmaßes  $M_{dk}$  in Abhängigkeit von der Verkippung  $\Delta Z$ . Die ausschlaggebenden Konstanten der Gleichung sind Zähnezah und Schrägungswinkel.

$$M_{dk}(\Delta Z) = f \left\{ \beta, \frac{\pi}{2Z}, \dots \right\}$$



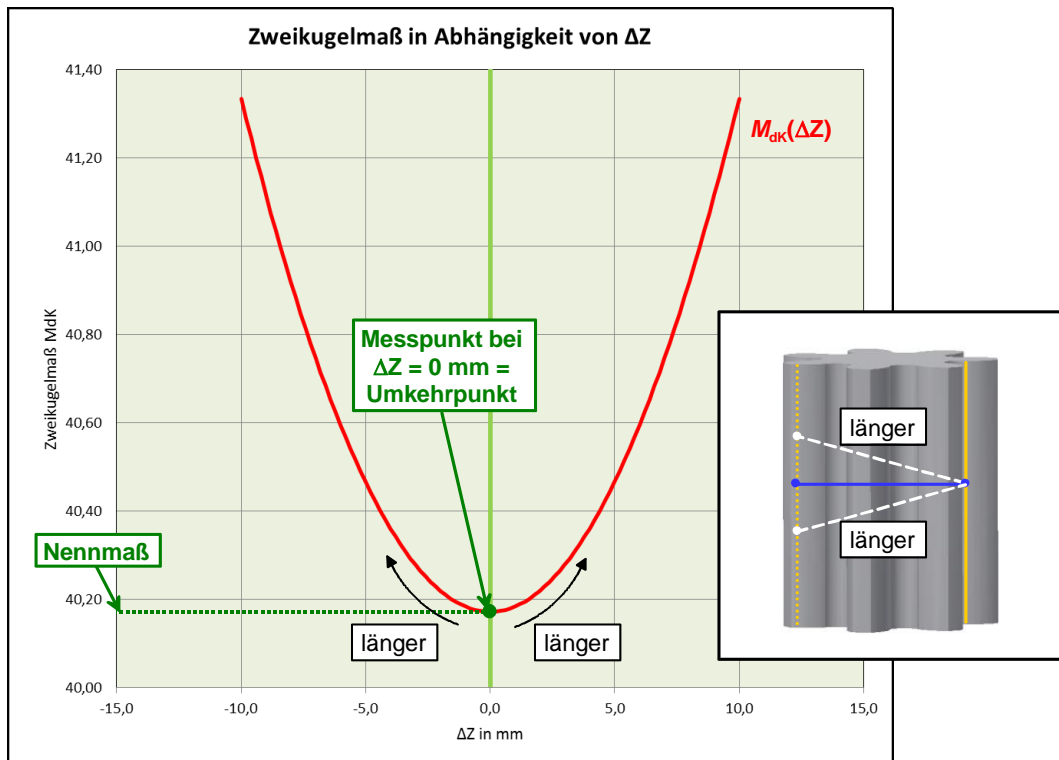
Zeichnet man die Funktion z.B. für das Lehrzahnrad mit 31 Zähnen und einem Schrägungswinkel von  $-20^\circ$  aus dem Abschnitt 3 in ein Diagramm, erhält man folgende Kurve (im Bild rot):



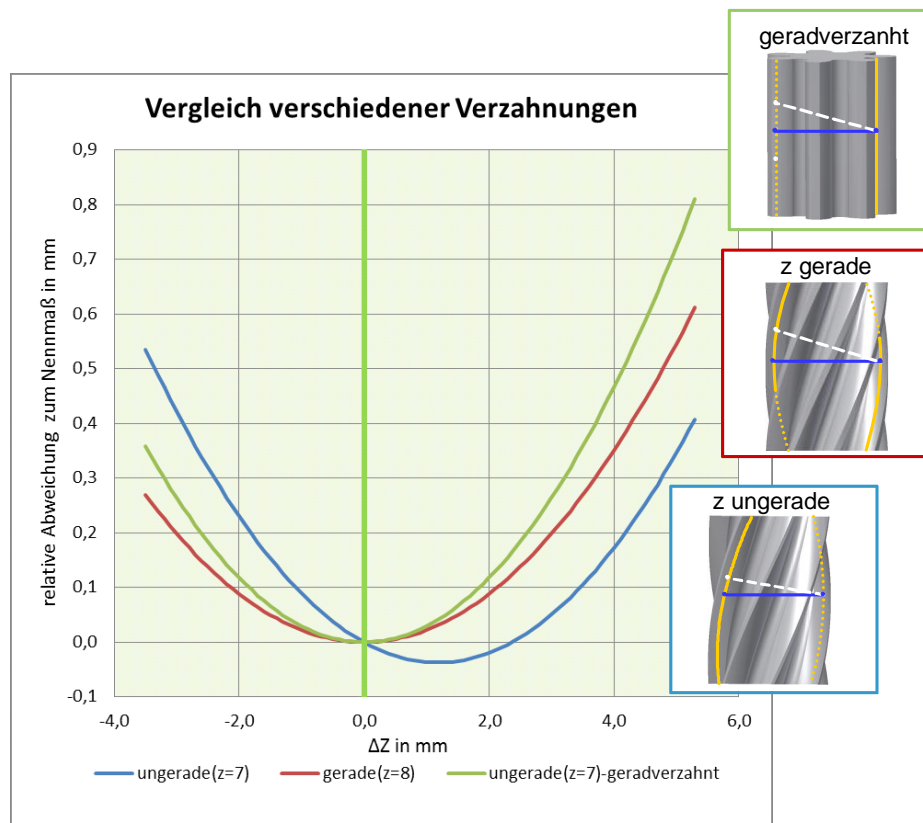
Zum Vergleich die exakten Werte: Maß am Umkehrpunkt: 117,6729 mm  
Verkippung: 2,528 mm



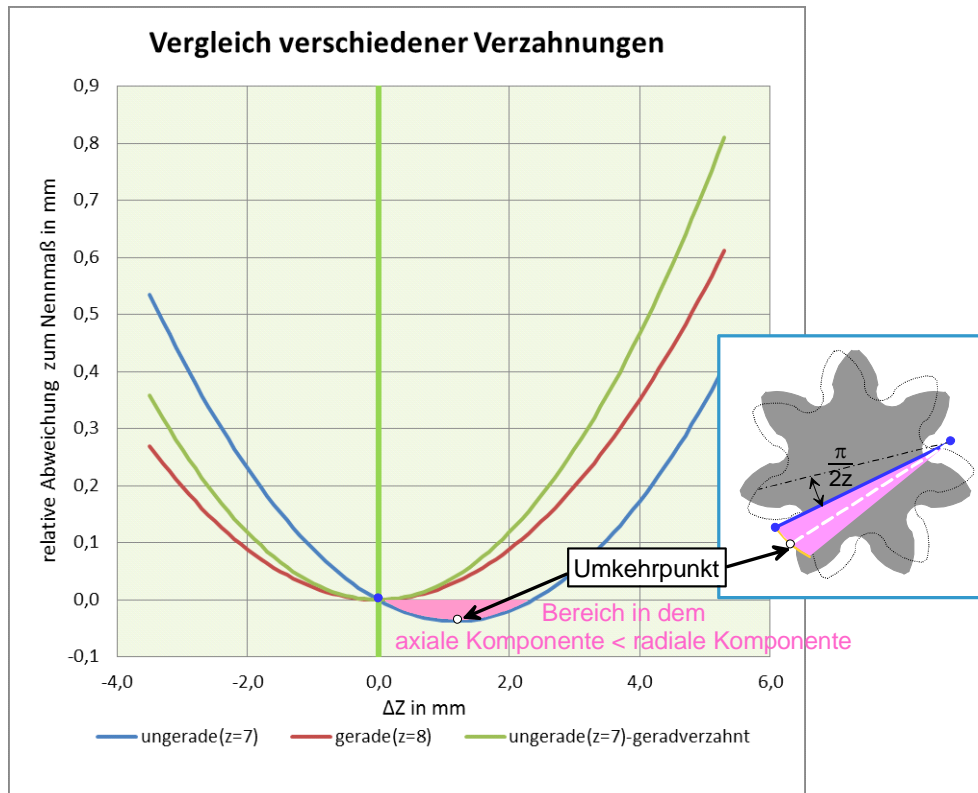
Zeichnet man die Kurve für eine Geradverzahnung ( $\beta = 0^\circ$ ), gibt es keinen Unterschied zwischen Umkehrpunkt und gewünschten Messpunkt. Der kleinste Punkt der Kurve liegt genau bei  $\Delta Z = 0$ .



Gleiches gilt für Schrägverzahnungen mit gerader Zähnezahl. Das folgende Diagramm zeigt die drei verschiedenen Verzahnungen im Vergleich.

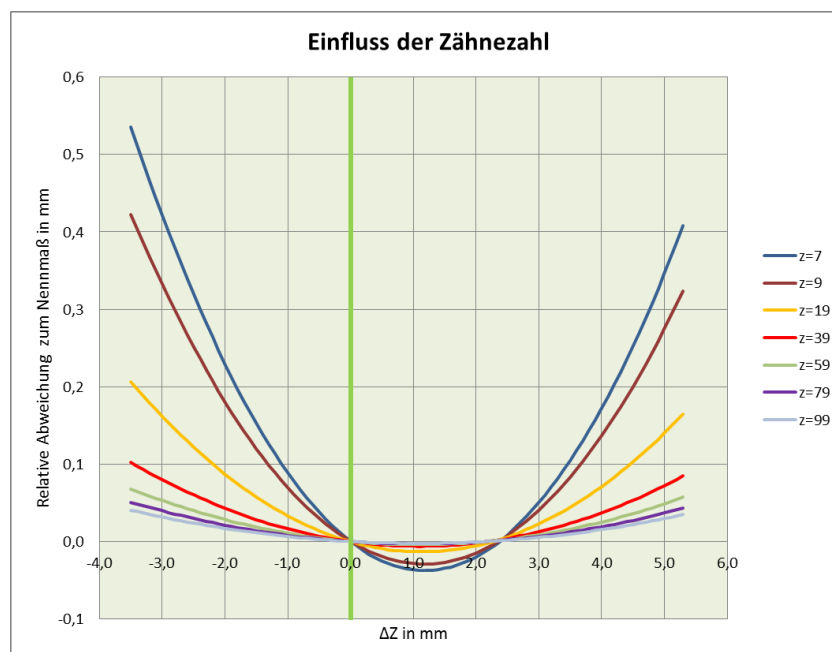


In der Kurve für Schrägverzahnungen mit ungerader Zähnezahl ist auch der Bereich wiederzufinden, in dem die axiale Komponente (Verlängerung) kleiner ist als die radiale (Verkürzung). Der Umkehrpunkt liegt in der Mitte dieses Bereichs.

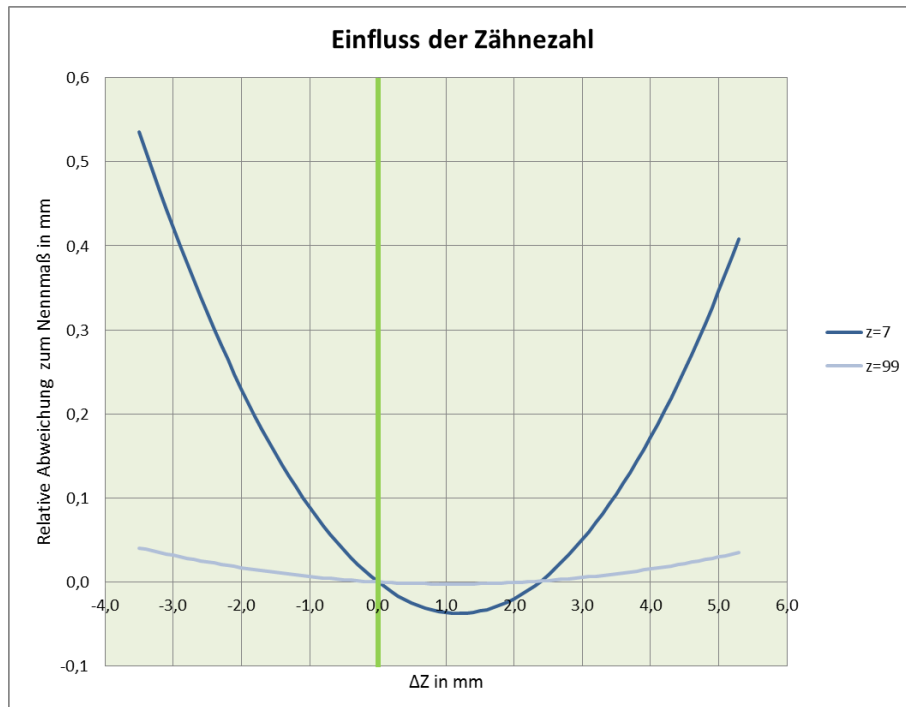


## 5 Wovon hängt die Größe des Fehlers ab?

Der erste, wesentliche Einfluss ist die Zähnezahl. Lässt man sämtliche Verzahnungsparameter gleich und verändert nur die Zähnezahl, erhält man folgende Kurven im Diagramm:

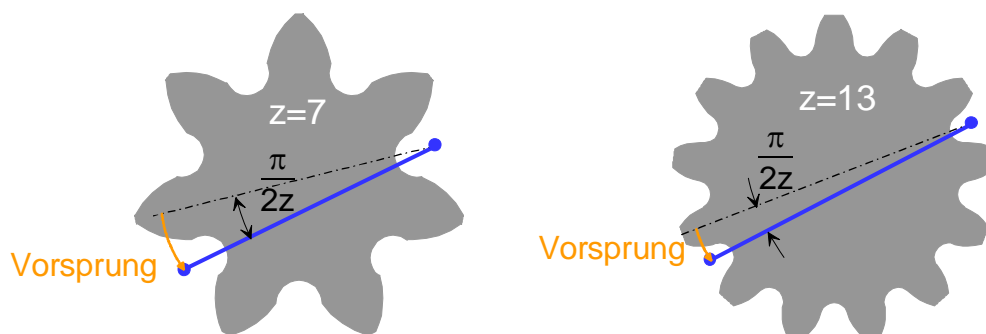


Die Zähnezahl verändert die Krümmung der Kurve. Eine kleinere Zähnezahl hat eine stärkere Krümmung zur Folge. Die Größe der Verkippung  $\Delta Z$  ist bei gleichbleibenden Verzahnungsparametern konstant. Mit der Krümmung ändert sich nur die Größe des Maßes am Umkehrpunkt. Vergleicht man die Kurven der kleinsten und größten Zähnezahl, fällt auf, dass der Fehler bei 99 Zähnen verschwindend gering wird.

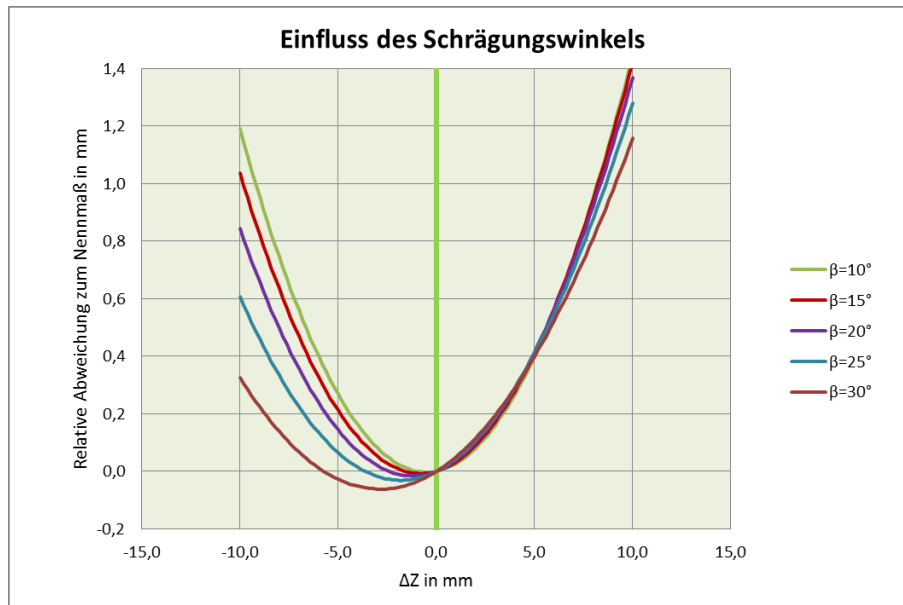


Der Unterschied zwischen Umkehrpunkt und Zweikugelmaß ist größer, je kleiner die Zähnezahl ist.

Anders ausgedrückt: Der Winkel  $\frac{\pi}{2z}$  wird größer, je kleiner die Zähnezahl  $z$  ist. Ein großer Winkel bedeutet einen großen Vorsprung für Verkürzung durch die radiale Komponente.



Den zweiten großen Einfluss hat der Schrägungswinkel. Das folgende Diagramm zeigt die Kurven bei gleichbleibenden Verzahnungsparametern mit fünf unterschiedlichen Schrägungswinkeln.

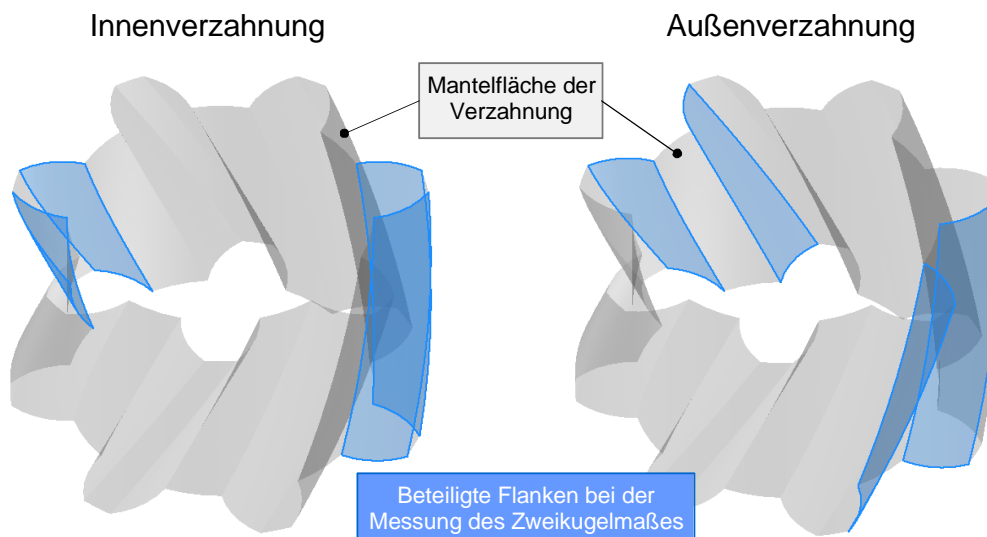


Der Schrägungswinkel verändert gleichzeitig die Größe der Verkippung und das Maß am Umkehrpunkt. Bei dieser Verzahnung (23 Zähne, Modul 1,4 mm und Eingriffswinkel 17,5°) beträgt die Abweichung zum Sollmaß bei  $\beta = 10^\circ$  3,3  $\mu\text{m}$ . Bei  $\beta = 30^\circ$  beträgt sie 62  $\mu\text{m}$ .

Der Unterschied zwischen Umkehrpunkt und Zweikugelmaß ist größer, je größer der Schrägungswinkel ist.

Am „gefährlichsten“ ist folglich die Kombination aus kleiner Zähnezahl und großem Schrägungswinkel.

Das Phänomen gilt auch für Innenverzahnungen. Am besten stellt man sich die Verzahnung nur als Mantelfläche vor. Der einzige Unterschied zwischen einer Innen- und Außenverzahnung besteht darin, dass unterschiedliche Flankenflächen bei der Messung des Maßes beteiligt sind. Die radiale Komponente entlang der Schraubenlinie, die die Verkürzung verursacht gibt es bei der Innenverzahnung genauso.





## 6 Zusammenfassung

Bei der Messung des diametralen Zweikugelmaßes durch Auspendeln von Schrägverzahnungen mit ungerader Zähnezahl macht man einen Fehler. Hier noch einmal die eingangs formulierten Fragen knapp beantwortet:

-----  
1. Wie groß ist der Fehler?

Der Fehler ist abhängig von der Verzahnungsgeometrie und liegt zwischen wenigen Zehntelmikrometern und mehreren Hundertstelmmillimetern.

-----  
2. Warum tritt das nur bei Schrägverzahnungen mit ungerader Zähnezahl auf?

Wegen des Winkels  $\frac{\pi}{2z}$ . Er sorgt dafür, dass sich die Kugeln bei bestimmten Kippwinkeln radial schneller nähern, als sie sich axial voneinander entfernen. Damit gibt es beim Verkippen einen Abstand zwischen den Kugeln der kleiner ist als das Nennmaß.

-----  
3. Wovon hängt die Größe des Fehlers ab?

Hauptsächlich von Zähnezahl und Schrägungswinkel. Wenig Zähne und ein großer Schrägungswinkel vergrößern den Fehler.

-----  
4. Gilt das auch für Innenverzahnungen?

Ja!

## 7 Was kann man tun?

Schrägverzahnungen mit ungerader Zähnezahl sollten nur dann durch Auspendeln gemessen werden wenn der Fehler bekannt ist und schon beim Zusammenstellen der Endmaße für die Messung berücksichtigt werden kann. Anstelle des Zweikugelmaßes wird der Feinzeiger auf das Maß am Umkehrpunkt eingestellt. Der Prüfer kann dann trotzdem durch Auspendeln nach dem Umkehrpunkt suchen und erhält so die relative Abweichung zum Maß am Umkehrpunkt. Er kann sich dann sicher sein, dass auch das Zweikugelmaß in der rechtwinkligen Ebene stimmt. Die Berechnung des Maßes am Umkehrpunkt ist mit der Software *Spline Calculator* von FRENCO möglich. Zusätzlich wird die Berechnung online unter [www.frenco.de](http://www.frenco.de) angeboten.

Diese Methode dient aber lediglich als Hilfe in der Fertigung und funktioniert nur unter Vorbehalt. Denn definiert ist die Messung in der Ebene, die rechtwinklig zur Achse steht. Man misst somit an der falschen Stelle. Deshalb kann sie grundsätzlich nur angewendet werden, wenn keine großen Abweichungen, v.a. in der Form zu erwarten sind und die Verzahnung keine Modifikationen enthält. Eine spätere Überprüfung des Zweikugelmaßes mit der genormten Methode ist unumgänglich.

Die sicherste Messung ist die mit Plananschlag. Denn der sorgt dafür, dass die Messebene immer rechtwinklig zur Verzahnungsachse steht.